



INSTITUTO DE FÍSICA  
Universidade Federal Fluminense

Instituto de Física - UFF  
Física Geral e Experimental I/XVIII

Prof. Hisataki Shigueoka

e-mail: hisa@if.uff.br

## Lista 14: Rolamento & Momento Angular<sup>1</sup>

1. Uma bolinha compacta de massa  $m$  e raio  $r$  rola sem deslizar ao longo do trilho em curva de raio  $R$  mostrado na Fig.(1), tendo sido abandonada em repouso em algum ponto de altura  $h$  da parte mais baixa do trilho. (a) De que altura mnima, a partir da base do trilho, a bolinha deve ser solta para que percorra a parte superior da curva? Considerar  $R \gg r$ . (b) Se a bolinha for solta da altura  $6R$  acima da base do trilho, qual a componente horizontal da fora que atua sobre ela no ponto  $Q$ ? Resp.: (a)  $\approx 2,7R$ ; (b)  $\approx 50mg/7$ .

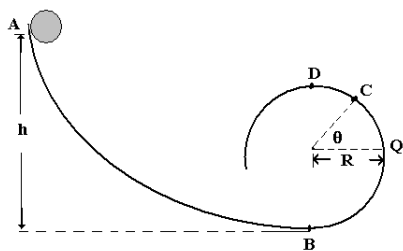


Fig. 1: Probl. (1).

2. Um cilindro maciço de massa  $M$  e raio  $R$ , totalmente sem apoio, tem um fio leve enrolado em volta. À medida que o barbante se desenrola e o cilindro gira, a extremidade do barbante é continuamente puxada para cima verticalmente com uma força apenas suficiente para impedir que o cilindro desça relativamente ao solo. (a) Qual a tensão na parte vertical do barbante? (b) Qual a aceleração angular do disco? (c) Qual a aceleração para cima em qualquer ponto dado sobre a parte vertical do barbante? Resp.: (a)  $Mg$ ; (b)  $2g/R$ ; (c)  $2g$ .
3. Um cilindro sólido de raio  $R$  e massa  $M$  se move em direção para baixo no plano inclinado de ângulo  $\theta$  com

a horizontal. Considere que o corpo rola sem deslizar. (a) Faça diagrama das forças envolvidas no corpo. (b) Mostre, utilizando as equações de energia, que a velocidade do corpo após descer a rampa de altura  $h$  é  $v = \sqrt{2gh/(1 + I/mR^2)}$ , onde  $I$  é a inércia rotacional do corpo sólido. (c) Utilizando as equações de dinâmica rotacional e translacional, mostre que a aceleração linear do corpo rígido é  $a = g \sin\theta/(1 + I/mR^2)$ . (d) Mostre que, no caso de corpo cilíndrico maciço, a condição para o rolamento puro é  $\mu_e \geq \tan\theta/3$ , onde  $\mu_e$  é o coeficiente de atrito estático. (e) Mostre que a energia mecânica se conserva. (f) Como se explica o item anterior mesmo com a presença da força de atrito?

4. Um cilindro maciço de massa  $23,4kg$  e raio  $7,60cm$  tem uma fita fina e leve enrolada em torno de si. A fita passa, sem delizar, por uma polia leve e sem atrito no eixo e está presa a um objeto de massa  $4,48kg$ , que pende verticalmente. O plano sobre o qual se move o cilindro tem inclinação de  $28,3^\circ$  com a horizontal. O cilindro desce o plano inclinado sem escorregar. (a) Mostre que a aceleração linear de um ponto do fio é  $2a_{cm}$ , onde  $a_{cm}$  é a aceleração linear do centro de massa do cilindro. Calcule (a) a aceleração  $a_{cm}$  e (c) a tração na fita. Resp.:  $0,37 m/s^2$ ;  $47,3 N$ .
5. Um estudante joga para o ar um bastão de comprimento  $L$ . No momento em que o bastão deixa as suas mãos do estudante a velocidade da ponta do bastão mais próxima às suas mãos é nula. O bastão completa  $N$  voltas até ser novamente apanhado pelo estudante no ponto de partida. Mostre que a altura  $h$  a que o centro de massa subiu é  $h = pNL/4$ .
6. Uma pedra de  $2,0 kg$  possui uma velocidade horizontal com módulo de  $12,0 m/s$  quando está no ponto  $P$  na Fig.(2). O ângulo é  $\theta = 36,9^\circ$ . (a) Nesse instante, qual é o módulo, a direção e o sentido do seu momento angular em relação ao ponto  $O$ ? (b) Caso a única força que atue sobre a pedra seja seu peso, qual é a taxa de variação (módulo, direção e sentido) do momento angular nesse instante? Resp.: (a)  $115 kg m^2/s$ , para dentro da página; (b)  $125 kg m^2/s$ , para fora da página.
7. Um haltere é formado por duas esferas cada uma de massa  $m$  ligadas por uma barra rígida de massa de-

<sup>1</sup>arquivo: LISTA14\_Rolamento&MomAngular2010.TpX

sprezível e comprimento  $d$ . O conjunto repousa sobre uma mesa de ar horizontal. Uma terceira esfera também de massa  $m$  move-se perpendicularmente à barra com velocidade  $v_0$  e colide frontalmente com uma das esferas, permanecendo grudada à massa, Fig.(3). (a) Descreva os movimentos das esferas após a colisão. e determine a trajetória do CM do sistema. (b) Calcule a velocidade do CM do sistema após a colisão. (c) O momento angular e a energia cinética do sistema se conservam? Explicar. (d) Calcule a velocidade angular de rotação do sistema em torno do CM após a colisão. (e) Calcule a razão entre as energias cinéticas do sistema antes e após a colisão. *Resp.* (a) *movimentos de translação do CM e rotação em torno do eixo que passa pelo CM; direção paralela a  $v_0$  e a  $d/3$  de sua direção;* (b)  $v_0/3$ ; (d)  $v_0/2d$ ; (e) 0,5

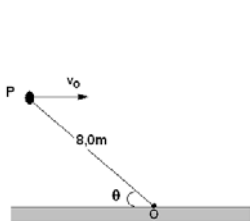


Fig. 2: Probl. (6 ).

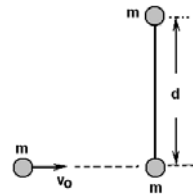


Fig. 3: Probl. (7).

8. Uma partícula de massa  $m$  é lançada com uma velocidade inicial  $\vec{v}_0$ , fazendo um ângulo  $\theta$  com a horizontal, como é apresentada na Fig.(4). A partícula se move no campo gravitacional da Terra. Achar o momento angular da partícula em relação à origem, quando a partícula estiver (a) na origem, (b) no ponto mais elevado de sua trajetória e (c) imediatamente antes de atingir o solo. (d) Que torque provoca a variação do momento angular? *Resp.:* (a) Zero;  $[-m v_0^3 \sin^2 \theta \cos \theta / 2g] \hat{k}$ ; (c)  $[-2m v_0^3 \sin^2 \theta \cos \theta / g] \hat{k}$ ; (d) *A força da gravidade, para baixo, exerce um torque na direção dos  $-z$ .*
9. Na vista de cima, quatro hastes finas e uniformes, cada uma com massa  $M$  e comprimento  $d = 0,50 m$ , estão rigidamente conectadas a um eixo em  $O$  formando uma roleta. Ver a figura. A roleta gira livremente em sentido horário em torno do eixo em  $O$ , o qual está preso ao piso, com velocidade angular  $2,0 \text{ rad/s}$ . Uma bola de argila

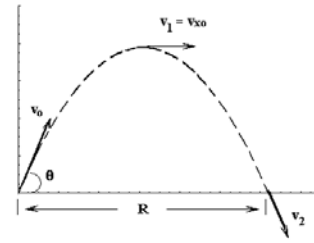


Fig. 4: Probl. (8).

de massa  $m = M/3$  e velocidade linear  $v_i = 12,0 \text{ m/s}$  é lançada ao longo da trajetória mostrada na figura, onde  $\theta = 30^\circ$ , e se gruda na extremidade de uma das hastes. (a) A energia cinética dos sistema e os momentos linear e angular antes e após a colisão se conservam? Justifique a resposta. (b) Calcule a inércia rotacional do sistema bola-roleta em torno do eixo de rotação em  $O$ . (c) Qual é a velocidade angular do sistema bola-roleta após a colisão? Para qual sentido o sistema gira? *Resp.* (a) *A energia cinética e momento linear não se conservam. O momento angular se conserva.* (b)  $0,42 M$ . (c)  $2,56 \text{ rad/se}$ , sentido anti-horário.

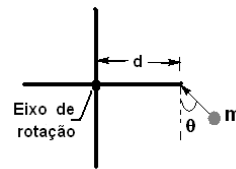


Fig. 5: Probl. (9).

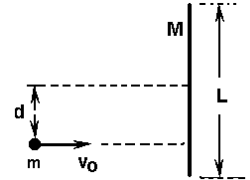


Fig. 6: Probl. (14).

10. Uma criança de massa  $M$  está em pé na borda de um carrossel (massa  $10M$ , raio  $R$  e momento de inércia  $I$ ) sem atrito e em repouso. Ela joga uma pedra de massa  $m$  em uma direção horizontal que é tangente à borda externa do carrossel. A velocidade da pedra, em relação ao solo, é  $v$ . (a) O momento angular total do sistema se conserva? Justifique. (b) Calcule a velocidade angular do carrossel, (c) a velocidade linear da criança depois que a pedra foi jogada? *Resp.* (a)  $m v R / (M R^2 + I)$ ; (b)  $m v R^2 / (M R^2 + I)$ .
11. Uma plataforma circular e horizontal de raio  $2,0 m$  e momento de inércia  $I = 200 \text{ kg m}^2$  gira a  $\pi/8 \text{ rad/s}$

enquanto uma criança de massa  $42\text{ kg}$  está de pé a  $1,20\text{ m}$  do eixo de rotação que passa pelo centro da plataforma. A criança caminha lentamente em direção à borda da plataforma. Desprezando qualquer atrito no eixo da plataforma e considerando a criança como partícula, responda: (a) qual é a velocidade angular do sistema quando a criança chega à borda da plataforma? (b) qual é o trabalho realizado pela criança? *Resp.* (a)  $0,28\text{ rad/s}$ ; (b)  $-5,64\text{ J}$

12. Uma mulher está em pé numa plataforma montada em mancais sem atrito a qual gira em torno de um eixo vertical. O momento de inércia da mulher e da plataforma é de  $6,8\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . A mulher está carregando um peso de  $3,6\text{ kg}$  em cada mão. Os pesos estão a  $0,76\text{ m}$  do eixo da plataforma ou da cintura da mulher e a uma velocidade angular de  $2,0\text{ rps}$ . Ela move os seus braços para dentro (em direção à sua cintura muito fina) até os pesos estarem no eixo de rotação. (a) Considerando os pesos como corpos puntiformes, encontre a velocidade angular final do sistema (plataforma, mulher e pesos). (b) Calcule também as energias cinéticas inicial e final do sistema. Explique por que a energia não é conservada. *Resp.* (a)  $20,2\text{ rad/s}$ ; (b)  $8,6 \times 10^2\text{ J}$ ,  $1,4 \times 10^3\text{ J}$ .

13. Uma força motriz dependente do tipo  $F(t)$  atua, num intervalo pequeno, sobre um corpo rígido que possui momento de inércia  $I$ . Mostre que

$$\int \tau dt = \langle F \rangle b \Delta t = I(\omega_f - \omega_i)$$

onde  $b$  é o braço do momento da força;  $\langle F \rangle$  é o valor médio da força durante este intervalo de tempo;  $\omega_i$  ( $\omega_f$ ) é a velocidade angular imediatamente antes (após) da aplicação (remoção) da força. (A quantidade  $\int \tau dt$  denomina-se *impulso angular* que corresponde a uma grandeza linear análoga denominado impulso linear.)

14. Uma barra de comprimento  $L$  e massa  $M$  repousa sobre uma mesa horizontal sem atrito. Um taco de hóquei de massa  $m$ , movendo-se com velocidade  $v_o$ , Fig.(6), colide elasticamente com a barra a uma distância  $d$  do centro da barra. (a) Que grandezas são conservadas na colisão? (b) Qual deve ser a massa do taco em termos de  $M$ ,  $L$  e  $d$  para que ele fique em repouso após

a colisão? *Resp.* (a) *Energia*,  $\vec{p}$ ,  $\vec{L}$ ; (b)  $M/[1 + 12(d/L)^2]$ .

15. Uma barata se encontra no centro de um disco circular de raio  $R$  que gira livremente como um carrossel sem torques externos. A barata caminha em direção à borda do disco, a uma distância radial  $R$ . A Fig.(7) fornece a velocidade angular  $\omega$  em  $\text{rad/s}$  do sistema barata-disco durante a caminhada. (a) Quando a barata encontra-se na borda do disco de raio  $R$ , qual é a razão entre o momento de inércia do inseto e o momento de inércia do disco, ambos calculados em torno do eixo de rotação? (b) Qual é a variação da energia cinética do sistema desde o instante em que a barata se encontra no centro do disco até ela se chegar na borda do disco? *Resp.* (a)  $1/5$ ; (b)  $-3 I_d$

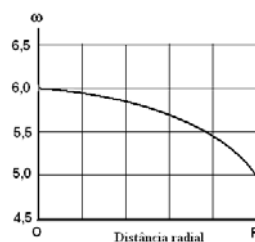


Fig. 7: Probl. (15).

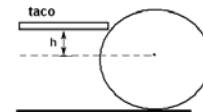


Fig. 8: Probl. (16).

16. Uma bola de bilhar de massa  $m$  e raio  $R$ , inicialmente em repouso, recebe um impulso instantâneo de um taco, Fig.(8). Este é mantido horizontalmente à distância  $h$  acima da linha do centro. (a) Utilize as expressões de momento linear e angular (Probl. 13) para expressar a altura em função do raio  $R$  e das velocidades lineares,  $v_0$ , e angular,  $\omega_0$ , ap'os o tempo de contato  $\Delta t$  do taco na bola. (Aqui se considera que a bola rola e escorrega, isto é,  $v \neq R\omega$ .) (b) No instante posterior ao impacto do taco sobre a bola expresse o torque explicando o efeito desse torque e o seu sentido. (c) Num instante  $t$  a velocidade linear da bola é  $9 v_0/7$  quando cessa o rolamento com deslizamento iniciando o rolamento puro. Nesse caso, mostre que a posição de impacto do taco é  $h = 4R/5$ . (d) Agora, mostre que a altura  $h = 2R/5$  é o ponto de impacto do taco sobre a bola para que a bola inicie o movimento sem se escorregar.